

Transferencia de calor en una barra de aluminio

Anónimo1 y Martín Gareis
martingareis585@outlook.es

Docente: Anónimo

Resumen—En este informe se estudia el fenómeno de transferencia de calor sobre una barra de aluminio, maciza y aislada térmicamente. En sus extremos se la expuso a dos fuentes de calor, una a 70°C y la otra a 2°C, y a partir de poner 8 sensores térmicos, en contacto directo con la misma, se midió la temperatura en función del tiempo y la posición. A partir de una solución numérica de la ecuación de calor, los resultados obtenidos fueron comparados con un modelo físico. Con respecto a los resultados obtenidos, los mismos distan de lo que predice el modelo. Si bien las curvas tienen un comportamiento general, similar al esperado, tanto los valores de equilibrio como los transitorios no fueron los predichos por el modelo. De todas formas, en el equilibrio existió una correlación lineal de 0,98, y es posible que las diferencias observadas se deban a un problema en las características no previstas del objeto de estudio.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de la transferencia de calor en distintos materiales ha proporcionado grandes avances en distintas tecnologías que diariamente nos facilitan la vida. Por ejemplo el surgimiento de aislantes térmicos, empleados tanto en edificios, como en casas, que disminuyen el consumo eléctrico requerido por la calefacción.

En este informe se detalla una experiencia cuyo objeto de estudio es la transferencia del calor a lo largo de una barra cilíndrica de aluminio. En uno de sus extremos, la misma fue conectada a un reservorio con agua caliente, mientras que en el extremo opuesto fue conectada a un reservorio con agua y hielo. A partir de una serie de termistores conectados a lo largo de dicha barra, se pudo determinar la temperatura de la misma en función de la posición y el tiempo.

El modelo físico implementado se basa en una ecuación diferencial de derivadas parciales, denominada Ecuación de Calor (1). A partir de la resolución de esta ecuación, se obtuvo un modelo de referencia para comparar los datos obtenidos.

II. MODELO FÍSICO

El modelo físico implementado se basa en la Ecuación de Calor (1) la cual modela las variaciones de temperatura a lo largo del tiempo y el espacio. Solamente se toma en cuenta una dimensión espacial, dado que la longitud del cilindro es mas grande que el radio en más de un orden de magnitud simplificando así el modelo físico. Se asume con características homogéneas en toda su estructura, como su densidad y su conductividad térmica.

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

La ecuación de calor es una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya solución se puede entender como suma de la

solución homogénea y la solución de equilibrio, en la cual la temperatura en función de la posición no varía en el tiempo. El parámetro λ es la constante de difusividad térmica, que para el aluminio tiene un valor de $\lambda = 97,5 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. En el caso de la solución de equilibrio, la derivada temporal es nula y por lo tanto la derivada segunda con respecto a la posición también es nula. Esto implica que la temperatura en función de la posición es un polinomio de primer grado ecuación (2). La siguiente ecuación se deduce de las condiciones de borde del sistema, en donde L es la longitud de la barra, T_1 la temperatura constante del extremo en la posición de valor nulo y T_2 la temperatura constante del extremo en la posición de valor L siendo $T_1 > T_2$.

$$T_e(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \quad (2)$$

En el caso de la solución homogénea, la barra se encuentra inicialmente a una temperatura constante a lo largo de su eje. En esta solución se emplea el uso de la separación de variables, en este caso el tiempo y la posición para ser multiplicadas como se denota en esta ecuación $T_H = X(x) \cdot P(t)$.

Sustituyendo esta solución en la ecuación 1 se puede encontrar la siguiente relación en donde α es una constante.

$$\frac{1}{\lambda} \frac{P'}{P} = \frac{X''}{X} = -\alpha^2 \quad (3)$$

De la ecuación anterior se obtienen las siguientes igualdades.

$$\begin{cases} P' = -\lambda \alpha^2 P \\ X'' = -\alpha^2 X \end{cases} \quad (4)$$

De las ecuaciones (3) y (4) se obtienen ecuaciones analíticas para la separación de variables la cuales se detallan en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) \\ P(t) &= C_3 e^{-\lambda \alpha^2 t} \end{aligned} \quad (5)$$

Las diferentes constantes se obtienen con las condiciones de borde.

La solución homogénea es una sucesión infinita convergente definida como:

$$T_H(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\lambda \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (6)$$

El factor multiplicante A_n se especifica a continuación, donde $g(x) = T(x, t = 0)$.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (7)$$

En conclusión, la ecuación que determina el comportamiento de la temperatura con respecto a la posición y el tiempo para esta experiencia se expone como la siguiente expresión analítica:

$$T(x, t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x + \sum_1^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (8)$$

III. MONTAJE EXPERIMENTAL Y ADQUISICIÓN

III-A. Termistores

Previo a la realización de experiencia, fue necesario calibrar los termistores. Estos son un sensor de temperatura cuyo funcionamiento se basa en la variación de la resistividad de un material conductor, ante variaciones en la temperatura, ver ecuación 10. La resistividad para los termistores utilizados sigue la siguiente relación:

$$R(T) = Ae^{\frac{B}{T}} \quad (9)$$

A y B son parámetros que dependen de cada sensor.

Si conectamos un termistor en un circuito, junto a una resistencia adicional R_0 en serie, y una fuente V_0 , es posible medir la diferencia de potencial V sobre el termistor y así obtener un valor para la resistencia.

$$R(V) = \frac{R_0 V}{V_0 - V} \quad (10)$$

La placa con termistores utilizada ya presentaba el circuito armado para su calibración, siendo la resistencia adicional de 1000Ω . La fuente a la que se conectó fue de 5V y se midió la diferencia de potencial sobre el termistor con una tarjeta NI. Se tomaron 17 medidas, sumergiendo los termistores en agua entre 5 y 92 °C.

Una vez obtenidas las diferencias de potencial, se halló el valor para la resistencia, para posteriormente con mínimos cuadrados, ajustar dichos resultados con respecto a la ecuación (10).

III-B. Adquisición de datos

El montaje experimental consistió en una barra de aluminio de 0.35m. de largo (forrada de un material aislante), de forma cilíndrica, en cuyos extremos se encuentran dos recipientes termo-aislantes con el fin de contener dos reservorios de calor constantes a distintas temperaturas. En la figura 1, se presenta un diagrama del montaje experimental. En uno de los contenedores se introdujo agua a una temperatura cercana a la punto de ebullición, mientras que en el otro se introdujo agua con hielo. Dentro de la barra se introdujeron, de forma aproximadamente equiespaciada, ocho sensores de temperatura.

Si bien en las primeras siete posiciones se utilizó termistores, en el último reservorio se colocó un termopar como remplazo de un termistor defectuoso. Dicho sensor se colocó en el reservorio con hielo, dado que en este punto la temperatura es mas estable, producto del cambio de fase hielo - agua líquida.

Para la obtención de la resistencia con respecto al tiempo, se utilizó una tarjeta digitalizadora National Instrument modelo

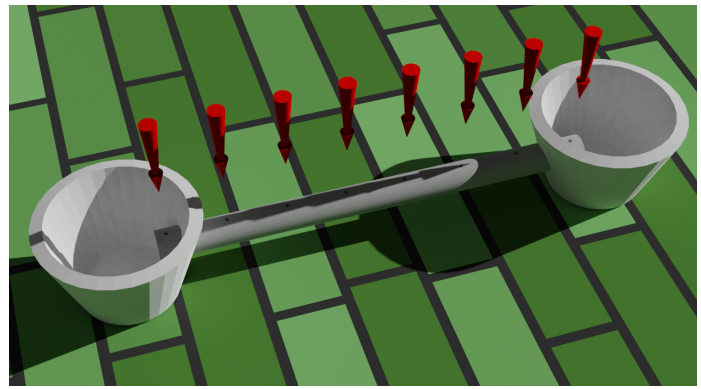


Figura 1. Representación tridimensional del montaje experimental. Puede observarse la barra cubierta de aislante de color gris y los recipientes de los extremos de color blanco. Las flechas rojas indican la ubicación de los ocho sensores.

USB-6009 que mide la diferencia de potencial de cada sensor. El conjunto de sensores se conectó a una fuente de potencial constantes de 5V.

La toma de datos se realizó cada 5 segundos, con una duración por toma de 0.1 segundos a una frecuencia de 1000Hz. Dado que la toma de datos fue automática, es decir, controlada por un ordenador, se indicó al programa que registrara el momento exacto de cada medición basándose en el reloj del computador.

Una vez preparado el montaje, se inició el registro de temperaturas y por último se agregó el agua caliente y el agua con hielo en sus respectivos contenedores. Durante los 24 minutos que duró el proceso aproximadamente, fue crucial controlar que la temperatura en los extremos se mantuviera constante.

III-C. Análisis numérico

Debido a la imposibilidad de calcular infinitos términos de la ecuación (8), se estableció un límite en la sumatoria de diez términos, basándose en que después del décimo, el siguiente es menor a la centésima parte de la suma de todos los términos anteriores.

IV. RESULTADOS

En la figura 2 se puede observar la temperatura en función del tiempo para cada sensor, comparados con los valores teóricos en línea punteada. Se separó la información en dos gráficas diferentes para facilitar la comprensión de los datos y poder comparar las mediciones con su valor teórico.

En los primeros segundos de la experiencia, se ve como aumentó abruptamente la temperatura en el primer sensor, debido a la introducción del agua caliente en el reservorio, y como comienza a variar la temperatura en el resto de los sensores de la barra.

Por otro lado, en los segundos finales, se observa como las variaciones de temperaturas son mínimas, llegando a una meseta, por lo que es posible afirmar que se llegó al equilibrio.

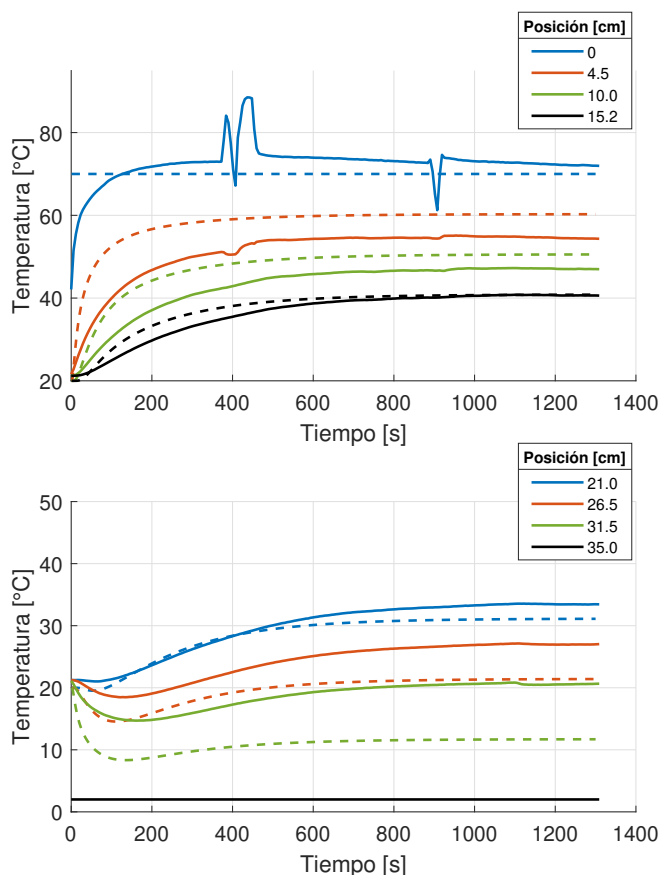


Figura 2. Se muestra la temperatura con respecto al tiempo para cada sensor diferenciados por color. Los datos experimentales se representan como línea sólida y el modelo se representa como línea punteada. Para facilitar la visualización de los datos estos se separaron en dos gráficas. Los datos concernientes a la posición 35.0cm son datos estipulados constantes a lo largo de la experiencia basados en mediciones manuales y esporádicas.

Si bien en términos generales las diferentes curvas tienen un comportamiento que se asemeja a lo que se esperaba observar a partir del modelo teórico, para todos los casos salvo para el termistor situado en 15.2 cm. existe diferencia, tanto en las temperaturas finales, como en las registradas durante todo el proceso, en especial para los termistores más cercanos al reservorio con hielo.

Para mantener la temperatura constante en reservorio caliente, se reemplazó parte de su agua, esto ocasionó las variaciones observadas sobre los 400 y 900 segundos.

En la figura 3 se observan los últimos datos obtenidos, donde se supuso que la barra llegó al equilibrio térmico.

Tal como indica el modelo teórico es esperable observar que los datos formen una recta en el equilibrio, cuya pendiente debería ser de -1.98, claramente esta situación no ocurre. Si bien podría afirmarse que el problema surge producto de no haber esperado lo suficiente en la figura 2 se ve que en los últimos instantes los datos obtenidos no varían con el correr del tiempo.

A modo de ejemplo la temperatura registrada en el termistor

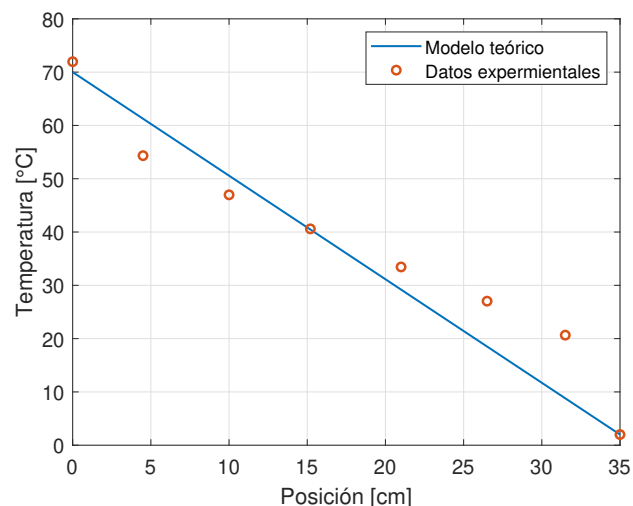


Figura 3. Gráfico de temperatura en función de la posición para los datos a los 1400 segundos después de inicializada la experiencia.

a 31 cm. fue de 20.5°C mientras que según el modelo debe debería ser de 8.25 °C.

Vemos que los datos que están a mayor temperatura, se encuentran por debajo de la recta, mientras que los de menor temperatura, se encuentran por encima de la misma. Esto puede deberse a un problema en la aislación de la barra, produciéndose un calentamiento en las zonas frías y un enfriamiento en las más calientes.

Adicionalmente existen otras explicaciones de este fenómeno inesperado por ejemplo que la barra de aluminio no mantuviese constantes sus propiedades en toda su estructura, erróneo posicionamiento de los sensores, así como fluctuaciones en la temperatura de los reservorios.

V. CONCLUSIONES

Fue posible obtener una serie de curvas para las variación de temperaturas de la barra de aluminio, en función de la distancia y del tiempo. Por otro lado los datos obtenidos distan de lo que se esperaba observar para una experiencia de este estilo. En su comportamiento a lo largo del tiempo, los mismos no se acercaron a las curvas teóricas. como tampoco lo hicieron los valores de equilibrio, aunque existió una relación lineal con un coeficiente de correlación de 0.98.

Es posible que haya existido un problema en el montaje experimental, por ejemplo en la estructura interna de la barra cuyas propiedades se consideraron como homogéneas. Por otro lado, una aislación deficiente también podría explicar parte de las variaciones, así como problemas de calibración de los termistores. Adicionalmente el método empleado para mantener constantes las temperaturas de los reservorios también opera como fuente de error, ya que estas variaciones no son consideradas por el modelo físico.

En caso de producirse una nueva repetición de esta experiencia, será preciso una nueva calibración y testeo de la misma, así como un montaje cuidadoso de todas las partes.

REFERENCIAS

- [1] Varios autores, "Ecuación del calor". Material provisto por la cátedra.
- [2] "Difusividad térmica del aluminio", <https://www.areaciencias.com/fisica/difusividad-termica/>.